

## ELECCIÓN COLECTIVA Y MEDIDAS DE DESIGUALDAD

*para su publicación en esta edición de [www.univerciudad.net](http://www.univerciudad.net).  
El uso de la información consignada en este documento  
requiere citación de fuente.*

**BECERRA Emperatriz., GONZALEZ Jorge.,** 1999. “Elección Colectiva y Medidas de Desigualdad”, en **CORREDOR Consuelo.,** ed. *Pobreza y Desigualdad. Reflexiones Conceptuales y de Medición*, Universidad Nacional, Colciencias, CINEP, GTZ, pp. 157-200.

En un estudio sobre la pobreza la desigualdad es relevante porque: ① está ligada a una teoría de la elección, ② es constitutiva de la medida de pobreza y ③ tiene implicaciones directas en el crecimiento. En este ensayo analizamos los dos primeros argumentos.

### 1. ELECCIÓN COLECTIVA Y DESIGUALDAD

“Todas las sociedades toman decisiones colectivas. Estas elecciones reflejan diferentes formas y grados de igualdad y democracia, al tiempo que contribuyen a que la distribución del bienestar de la sociedad sea más o menos desigual” (Real Academia de Suecia 1998, p. 1).

Así comienza el texto oficial de la Academia Sueca en el que se explican las razones por las cuales se le otorga el premio Nobel a Sen. La elección colectiva refleja “diferentes formas y grados de igualdad...”. La elección social y los grados de igualdad van de la mano.

La pregunta fundante de la teoría de la elección social es: ¿cómo lograr que los valores de la sociedad representen las preferencias de los individuos? La teoría de la elección social hace una reflexión sistemática sobre los procesos mediante los cuales la elección de cada individuo se expresa en la decisión colectiva. La versión moderna de la teoría de la elección social comenzó con los trabajos de Arrow (1951, 1963). Su campo de reflexión es el proceso de decisión en las elecciones. De manera explícita deja por fuera el análisis de formas de elección en organizaciones sociales diferentes a la democracia capitalista como, por ejemplo, el Islam o el comunismo estalinista.

La decisión por mayoría es la regla de elección típica de la democracia. Y no obstante sus virtudes, la regla de la mayoría tiene limitaciones evidentes. Una de ellas, es que mientras no haya unanimidad, la decisión colectiva dejará insatisfecha por lo menos a una persona. Se presenta, entonces, una incompatibilidad entre las decisiones individual y social. No hay consistencia entre ambos tipos de elección.

El descontento de la minoría y la respuesta de la mayoría se expresa de formas muy diversas. La mayoría puede respetar el punto de vista de la minoría y, además, tratar de realizar compensaciones que mejoren su situación. O, en el caso extremo, la mayoría puede optar por aniquilar a la minoría. Puesto que la regla de la mayoría se cumple en cualquiera de estas dos situaciones, concluye Arrow, la democracia no garantiza la justicia.

Las limitaciones de la democracia también reflejan las imperfecciones del mercado. No tiene sentido establecer una ruptura entre la elección económica, que se realiza en el mercado, y la elección social, que tiene lugar en la esfera de lo político. Desde la óptica de la elección social, las decisiones económica y política responden al mismo esquema valorativo de la persona. Los valores están incorporados en el proceso de decisión porque el individuo no escoge entre canastas de bienes sino entre “estados del mundo” (Arrow 1951). El ejercicio de Arrow es doble.

Primero, muestra que hay una inconsistencia lógica entre las elecciones individual y social: bajo las reglas de elección de la democracia liberal occidental no es posible que la decisión social exprese de manera adecuada las preferencias de los individuos. El único camino para hacer compatible la individual y la elección social es mediante la imposición o la dictadura. Estos resultados de Arrow se conocen en la teoría de la elección social como los “teoremas de imposibilidad”. O, sencillamente, como el “Teorema de la Imposibilidad”. Frente a los teoremas de imposibilidad, la situación óptima - de corte kantiano - sería aquella en la que cada persona siente que sus opciones valorativas no riñen con los principios éticos de la sociedad <sup>1/</sup>. Arrow reconoce que el

---

<sup>1/</sup> El imperativo categórico de Kant integra la norma moral del individuo y de la sociedad. “El imperativo categórico es, pues, único, y es como sigue: *tiempo que se torne ley universal*” (Kant 1785, p. 39).

“El imperativo práctico será, pues, como sigue: *obra de tal modo que uses la humanidad, tanto en tu persona como en la persona de cualquier otro, siempre como un fin al mismo tiempo y nunca solamente como un medio*” (Kant 1785, pp. 44-45).

Para la filosofía moral liberal, el planteamiento de Kant es fundamental porque su reflexión busca un ordenamiento moralmente justo a partir de la elección individual. Esta idea es clara en Rawls (1971, 1993).

“Kant en sus primeras dos *Críticas* intenta defender tanto nuestro conocimiento de la naturaleza, como nuestro conocimiento de nuestra libertad a través de la ley moral; también intenta convencernos de que la ley natural y la libertad moral no son incompatibles. Este punto de vista de la filosofía como defensa rechaza cualquier doctrina que no defina la unidad y la coherencia de la razón teórica y de la práctica; se opone al racionalismo, al empirismo y al escepticismo, en tanto que tienden a ese resultado ...

planteamiento de Kant facilita la comprensión del problema de fondo de la elección social, pero considera que la solución idealista no es apropiada porque impone condiciones “demasiado fuertes” (Arrow 1951, p. 83).

Segundo, advierte que la regla de la mayoría no ofrece ninguna certeza de que la ruptura entre las elecciones individual y social pueda saldarse respetando principios elementales de justicia.

Sin duda, las conclusiones de Arrow han sido descorazonadoras para quienes idealizan la sociedad de mercado y la democracia occidental. Pero vistas desde una perspectiva más realista, han abierto numerosas líneas de investigación en el campo de la economía y de la ciencia política <sup>2/</sup>. El trabajo pionero de Sen (1970) sobre elección colectiva se inscribe en la línea propuesta por Arrow.

El tema de la desigualdad tiene que ver directamente con la elección social porque dada la inconsistencia entre las decisiones individuales y sociales, la sociedad debe buscar los medios que permitan mejorar la situación de la minorías. La sociedad será más o menos justa, dependiendo de la forma como se realice esta compensación.

La compensación tiene que ver con la justicia distributiva y no con la justicia en el cambio. Esta última se refiere a las transacciones justas, expresadas en precios cantidades y calidad de las mercancías que se comercian. De alguna manera la justicia distributiva implica realizar transferencias de recursos. Mientras que la justicia en el cambio no modifica las dotaciones iniciales, la justicia distributiva sí lo hace (González 1994, 1998).

Arrow (1951, pp. 34-45) examina diversas modalidades de compensación. Menciona, entre otras, las soluciones de Kaldor, Scitovsky, Hicks. Sin entrar en los detalles la concepción de cada autor, el punto que deseamos destacar es este: los aspectos relacionados con la compensación son inherentes a la teoría de la elección social. Puesto que frente a la decisión colectiva la minoría queda más o menos descontenta, un ordenamiento social justo debe diseñar fórmulas que permitan realizar compensaciones. En una sociedad justa la mayoría no aniquila a la minoría sino que, por el contrario, trata de mejorar el bienestar de todos los miembros.

Al buscar los mecanismos de compensación más adecuados, la pregunta por la desigualdad termina siendo ineludible. Y, entonces, al lado de la desigualdad económica aparecen otros tipos de desigualdades: de oportunidades, de educación, de participación, etc. <sup>3/</sup>.

---

la justicia como imparcialidad aceptaría el punto de vista kantiano de la filosofía como defensa hasta este punto: dadas las condiciones razonablemente favorables, se entiende a sí misma como la defensa de la posibilidad de instituir un régimen democrático y constitucional justo” (Rawls 1993, p. 111).

<sup>2/</sup> Cuevas (1998) hace un recuento de la historia del debate.

<sup>3/</sup> Sobre este tema, ver Sen (1992).

En el terreno de la desigualdad económica, la compensación es una forma de redistribución del ingreso y/o de la riqueza. Algunos autores, especialmente los de corte keynesiano, insisten en la necesidad de conjugar la redistribución del ingreso con una redistribución de la remuneración factorial (salarios y ganancias). La primera modalidad de distribución (del ingreso) busca reasignar, por la vía de los subsidios y de los impuestos, los ingresos de las empresas y de los trabajadores. La segunda modalidad de compensación (factorial) trata de incidir directamente en el pago de los factores productivos. La fijación de un salario mínimo por parte del gobierno ilustra bien esta segunda alternativa. Tal disposición legal repercute en la definición de la relación tecnológica (capital/trabajo) de la empresa, ya que el pago del mínimo únicamente es rentable bajo ciertas condiciones tecnológicas. El empresario se ve en la obligación de organizar el proceso productivo de tal manera que logre un nivel de eficiencia que por lo menos le permita pagar el mínimo. Hay un vínculo directo entre las compensaciones factoriales y la relación tecnológica.

Las compensaciones pueden tomar formas muy variadas. La vía de los ingresos y la vía factorial apenas son dos ejemplos. Estos mecanismos de compensación son cualitativamente diferentes, aún si bajo ambas modalidades de distribución terminan con una remuneración neta igual. Cada forma de compensación desencadena procesos sociales específicos y de ahí que el abanico de opciones éticas sea amplísimo.

Al abordar las compensaciones, Arrow no pretende resolver las dificultades planteadas en su Teorema de Imposibilidad. Es claro que la compensación actúa como un correctivo que conduce a situaciones subóptimas. El problema básico de la elección social no se soluciona con compensaciones porque la decisión entre éstas siempre lleva a replantear de nuevo la pregunta fundamental: cómo escoger entre las compensaciones preferidas por los individuos?

Adicionalmente, las compensaciones introducen un problema complejo: el de las comparaciones interpersonales de utilidad y/o de bienestar. Desde su enfoque subjetivista la teoría económica convencional evita las comparaciones interpersonales: la utilidad y la felicidad son individuales. Así sea de manera indirecta, la compensación obliga a colocarse en la posición del otro (de la minoría). Es decir, a hacer comparaciones interpersonales o intergrupales de utilidad.

Sen (1970) retoma las reflexiones de Arrow <sup>4/</sup>. Acepta su punto de partida pero va más lejos. Muestra que el Teorema de Imposibilidad tiene solución siempre y cuando se relajen algunos de los postulados axiomáticos de Arrow. La elección social se expresa en la función de bienestar social (FBS) de Arrow y en la función de decisión social (FDS) de Sen.

---

<sup>4/</sup> Al otorgarle el premio Nobel, la Real Academia de Suecia (1998) reconoce el vínculo estrecho que existe entre los pensamientos de Arrow y de Sen. La Academia destaca los aportes de Sen en los siguientes campos: elección social, índices de pobreza y bienestar.

Las relaciones de preferencia de la función de bienestar social de Arrow (FBS) deben cumplir tres propiedades: completitud, reflexividad y transitividad.

Una relación de preferencia es completa si la elección cubre todos los pares de alternativas posibles. Entre  $x, z$ , la sociedad establece una relación de preferencia ( $R$ ) en la que  $x R z$  ó  $z R x$ . La completitud obliga a tomar posición frente las opciones  $x, z$ . La relación de indiferencia no riñe con la completitud. Por esta razón  $R$  incluye la preferencia propiamente dicha ( $P$ ) y la indiferencia ( $I$ ). La indiferencia es una forma de tomar posición. Es una manera de optar. La relación no es completa cuando la sociedad desconoce la opción  $x, z$ . La función de bienestar de la sociedad debe ser completa: frente a todos los pares de alternativas posibles la sociedad tiene que elegir.

La relación de preferencia es reflexiva si  $x R x$ . Para Arrow este es un tecnicismo que debe ser incorporado por respeto a la lógica.

Hay transitividad si  $x R y$  y  $y R z$  entonces  $x R z$ .

Piensa Arrow que estas tres condiciones son necesarias para que exista una función de bienestar social (FBS). Pero cuando los individuos libres eligen bajo las normas típicas de la regla de la mayoría, la relación de preferencia social no cumple con la transitividad. Este resultado es una expresión de la llamada paradoja del voto: mientras que las relaciones de preferencia individuales son transitivas, las relaciones de preferencia social no lo son. De manera más dramática: "... la soberanía del elector es incompatible con la racionalidad colectiva" (Arrow 1951, p. 60).

Para salir del impasse, Sen (1970) propone la función de decisión social (FDS) que debe cumplir las dos primeras condiciones de la FBS. Y, con respecto a la tercera condición, en lugar de la transitividad basta con que la FDS sea cuasi transitiva:  $x P y$  y  $y P z$  entonces  $x P z$ . Gracias a esta modificación, la FDS responde a reglas que garantizan la consistencia entre las decisiones individual y social, superando las trabas que habían conducido al Teorema de Imposibilidad de Arrow.

A la cuasi transitividad también se la llama la propiedad P-transitiva. Y a la transitividad, la propiedad R-transitiva. La transitividad se diferencia de la cuasi transitividad en que la primera admite la indiferencia, mientras que la segunda no. La cuasi transitividad exige que la sociedad elija entre las alternativas posibles a través de una preferencia fuerte ( $P$ ) y no admite que la relación de preferencia social sea indiferente ( $I$ ) antes dos opciones. Al negar la indiferencia la cuasi transitividad pierde generalidad y, por esta razón, es una propiedad más débil que la transitividad.

La pregunta relevante es si la distinción entre las relaciones de preferencia sociales P-transitiva y R-transitiva tiene implicaciones que superan las dimensiones estrictamente lógicas de la discusión. Con el fin de mostrar que el problema no es puramente formal lo abordamos desde el ángulo relevante para el análisis de la desigualdad: las comparaciones interpersonales de utilidad.

Arrow (1951, p. 59) reconoce que el Teorema de la Imposibilidad se presenta porque se excluyen las comparaciones interpersonales de utilidad. Si éstas se aceptaran desaparecería la imposibilidad. La introducción de las comparaciones interpersonales facilita encontrarle salidas al Teorema de Imposibilidad. Pero Arrow es incapaz de aceptar las comparaciones interpersonales.

La posición subjetivista de la teoría económica llevó a negar la pertinencia de las comparaciones interpersonales de utilidad y de bienestar. La argumentación parte de este principio: la utilidad es una sensación estrictamente individual y, por tanto, no tiene sentido colocarse en la situación del otro. Como Arrow trata de ser consecuente con dicho postulado, necesariamente llega a situaciones de imposibilidad.

La negación de las comparaciones interpersonales impide que el individuo  $i$  se coloque en la posición de la persona  $j$ . Así que afirmaciones del tipo “prefiero estar en la situación de Juan que en la mía” no tendrían sentido, porque no conozco la utilidad que experimenta Juan porque no sé cuál sería mi utilidad en caso de estar en la situación de Juan.

La posición de Sen es radicalmente diferente. Acepta la comparabilidad. Y, por consiguiente, para él es perfectamente válido que el individuo juzgue su utilidad a la luz de su percepción de la utilidad que experimentaría en caso de estar en la situación de la otra persona. La persona  $j$  decide teniendo en cuenta la utilidad que experimentaría si se colocase en el estado  $x$  de la persona  $i$ .

Pasemos a examinar la relación entre las comparaciones interpersonales y las propiedades P-transitiva y R-transitiva. NCI significa que no se admiten comparaciones interpersonales. CI quiere decir que las comparaciones interpersonales son permitidas.

Ya decíamos que en Arrow la ausencia de comparaciones interpersonales no permite que la función de elección social cumpla la propiedad R-transitiva:

NCI entonces no (R-transitiva)

Y en Sen:

CI entonces (P-transitiva)

La propiedad P-transitiva de la función de elección colectiva es consistente con CI. Sen admite que CI incluye un rango que va desde la no comparabilidad hasta la comparabilidad total. Así que NCI podría ser un caso especial de CI. Sin embargo, Sen (1970 b) muestra que el liberalismo extremo lleva a una contradicción: si se respeta hasta sus últimas consecuencias la libertad individual, alguno de los miembros de la sociedad termina siendo un dictador y, por tanto, negando el principio fundante de la democracia liberal. En las condiciones normales propias de

los regímenes políticos occidentales, de alguna manera el individuo que elige tiene en cuenta el bienestar de los otros. Y, por tanto, hace comparaciones interpersonales. Sen termina mostrando que en el contexto de la democracia liberal, NCI es un postulado contradictorio y poco realista.

Las comparaciones interpersonales facilitan una decisión social P-transitiva. Si las comparaciones no se admiten (NCI), es imposible saber si el bienestar del pobre es inferior al del rico, ya que no obstante la carencia de bienes materiales, la persona pobre puede ser más feliz que la persona rica. Y frente a esta indeterminación, la sociedad no puede hacer un ordenamiento R-transitivo de sus preferencias. Es incapaz de juzgar el bienestar relativo, ni siquiera para postular una relación de indiferencia (I).

Cuando se admiten las comparaciones interpersonales sí es posible afirmar que el bienestar del pobre es inferior al de la persona rica. A partir de allí la sociedad está en capacidad de establecer relaciones P-transitivas. La dificultad para precisar dichas relaciones depende del grado de comparabilidad: de la distancia que hay entre NCI y CI. Quizás no sea demasiado difícil ponernos de acuerdo en que el bienestar del pobre es menor que el del rico. Pero la complejidad crece cuando se trata de indagar por la intensidad de la variación en el bienestar que experimentan un pobre y un rico que reciben, respectivamente, \$ 200.000 y \$ 10.000.000 adicionales. Este tipo de comparación, en el margen, presenta mayor dificultad que la comparación de los niveles absolutos de bienestar. La cercanía a CI favorece la construcción de relaciones P-transitivas.

En la Constitución del 91 hay numerosos ejemplos de opciones fundadas en la percepción de que la sociedad debe tratar de mejorar el bienestar de quienes están en desventaja. La atención privilegiada a los pobres, la estabilidad del gasto público social, la obligatoriedad de la educación básica, etc., son elecciones constitucionales que corresponden a relaciones P-transitivas.

La aceptación de las CI tiene no sólo tiene la ventaja de que facilita la formulación de relaciones sociales P-transitivas. También permite explicitar y poner sobre el tapete las características de las compensaciones. Sen muestra, con mayor claridad que Arrow, las implicaciones que tienen los aspectos distributivos.

Resumiendo, el tema de la distribución es pertinente en el contexto de una teoría de la elección colectiva porque el conflicto que inevitablemente se presenta entre la decisión individual y la elección social obliga a realizar compensaciones. Y éstas necesariamente llevan a plantear preguntas por la justicia distributiva.

## 2. MEDIDA DE LA POBREZA Y DESIGUALDAD

La segunda razón para pensar la desigualdad en un estudio sobre la pobreza tiene que ver con la medida de la pobreza. El índice de pobreza de Sen (1976) incorpora de manera explícita un

medida de desigualdad. Desde la perspectiva teórica general, los índices de pobreza pueden ser vistos como casos especiales de índices de desigualdad” (Real Academia de Suecia 1998, p. 16).

La ausencia de comparaciones interpersonales (NCI) suele estar acompañada de un enfoque ordinal de la utilidad y del bienestar. Por ello no es extraño que Arrow prefiera las mediciones ordinales a las cardinales. Una vez que se aceptan las comparaciones interpersonales (CI), como lo hace Sen, puede recurrirse a medidas ordinales o cardinales. Los índices cardinales tienen la ventaja de que permiten evaluar las intensidades, pero uno de sus inconvenientes es que dificultan la formulación de proposiciones de carácter general. Sen (1976) destaca las ventajas y las limitaciones de cada tipo de medida. Puesto que ninguna de las dos aproximaciones es perfecta, la escogencia entre una u otra depende de los propósitos buscados. Al aceptar las comparaciones interpersonales (CI), Sen tiene más libertad que Arrow para escoger entre las medidas ordinales y cardinales.

La medición de la pobreza es importante porque ayuda a diseñar políticas para combatirla. Las acciones compensatorias (impuestos, subsidios, etc.) que buscan reducir la pobreza se deciden a través de la elección colectiva. Las sociedades no tienen la misma percepción de la justicia y ello se manifiesta en las modalidades y el monto de las compensaciones.

La medición de la pobreza está relacionada con la del bienestar. Es razonable suponer que la menor pobreza se refleja en un mayor bienestar social. Aceptando las dificultades que tiene la medición del bienestar, tanto Atkinson como Sen (1976) lo asocian al ingreso ( $y$ ).

1.

$$W_i = W(y_i)$$

El bienestar de la persona  $i$  ( $W_i$ ) depende de su ingreso ( $y_i$ ). La relación anterior puede simplificarse escribiendo  $W_i(y)$ . El Axioma de Monotonidad del Bienestar (M) es

#### Axioma M

“La relación  $>$  (mayor que) definida en el conjunto de los números de bienestar individuales  $\{W_i(y)\}$  para cualquier configuración del ingreso “ $y$ ” es un orden completo y estricto, y la relación  $>$  definida sobre el conjunto correspondiente de ingresos individuales  $\{y_i\}$  es una subrelación del primer conjunto, así que para todo  $i, j$ : si  $y_i > y_j$ , entonces,  $W_i(y) > W_j(y)$ ” (Sen 1976, p. 377).

Hay una relación positiva entre el ingreso y el bienestar. Si el ingreso aumenta también lo hace el bienestar. Y retomando los comentarios que hicimos a propósito de las comparaciones interpersonales, el Axioma M establece una regla muy sencilla para comparar el bienestar de las personas  $i, j$ . Si el ingreso de  $i$  es mayor que el de  $j$ , entonces el bienestar de  $i$  es superior al de  $j$ . En otras palabras, el rico está mejor que el pobre porque tiene un ingreso superior.

Destacamos tres características del Axioma M: explicita las comparaciones interpersonales (CI), asocia el bienestar al ingreso sin necesidad de pasar por la utilidad y ordena a los individuos a partir de una aproximación cardinal. Obviamente, y ello lo reconoce Sen, el ingreso es una aproximación unilateral al bienestar <sup>5/</sup>.

Al romper el vínculo entre la utilidad y el bienestar, Sen trata de evitar los problemas de la visión utilitarista de la justicia <sup>6/</sup>. El distanciamiento de Sen con respecto al utilitarismo sigue el camino abierto por Arrow (1951), quien considera que el hedonismo desconoce el papel fundamental que cumplen los valores en los procesos de elección individual y colectiva. Al hacer depender el bienestar del ingreso, el Axioma M rompe con el subjetivismo y pone al descubierto las jerarquías sociales que se desprenden de la diferencia de ingresos.

La lógica utilitarista va por partes. Primero hace depender el bienestar de la utilidad (u).

2.

$$W_i = W(u_i)$$

Después, hace depender la utilidad de  $x_{ij}$ , que representa los bienes  $x_j$  que consume el individuo i.

3.

$$u_i = u(x_{ij})$$

Y, finalmente, la demanda de bienes depende de los precios y el ingreso.

4.

$$x_{ij} = x(p_j, p_{n-j}, y_i)$$

La demanda de los bienes  $x_j$  por parte del individuo i depende del precio del bien j ( $p_j$ ), del precio de los otros bienes ( $p_{n-j}$ ), del ingreso del individuo i ( $y_i$ ). Mientras que la función 1

---

<sup>5/</sup> Al evaluar las características del Índice de Condiciones de Vida (ICV) a la luz de los axiomas de Sen (1976), Sarmiento A. y González (1998) se preguntan por las propiedades que posee el ICV como índice de bienestar o como uno de los argumentos de una función de bienestar.

<sup>6/</sup> Rawls (1971) critica el enfoque utilitarista de la justicia en estos términos: “Voy a entender el principio de utilidad en su forma clásica, es decir, como la satisfacción del deseo... La característica más sorprendente de la visión utilitarista de la justicia es que no importa, excepto de manera indirecta, cómo se distribuya esta suma de satisfacciones entre los individuos; como tampoco importa, excepto de manera indirecta, cómo un hombre distribuye sus satisfacciones en el tiempo. La distribución correcta en cada caso es la que produce la máxima satisfacción. La sociedad tiene que asignar sus medios de satisfacción, cualesquiera que sean, derechos y deberes, oportunidades y privilegios, y diversas formas de riqueza, de tal modo que, si puede, obtenga este máximo. Pero, en sí misma, ninguna distribución de satisfacciones es mejor que otra excepto en el caso en que una distribución más igualitaria sea preferida para romper vínculos” (Rawls 1971, p. 44).

relaciona directamente el bienestar y el ingreso, las funciones 2-4 lo hacen de manera indirecta:  $y \rightarrow x \rightarrow u \rightarrow W$ . La función 1 es más expedita y facilita la definición de los criterios de compensación.

El Axioma de Equidad Relativa (E) es

Axioma E

“Para todo  $i, j$ : si  $W_i(y) < W_j(y)$ , entonces,  $v_i(\gamma, y) > v_j(\gamma, y)$ ” (Sen 1976, p. 375).

$i, j$  son dos individuos,  $W$  es la función de bienestar respectiva.  $v_i$  es la participación que tiene la brecha de ingreso correspondiente a la persona  $i$  en la brecha total. La brecha es

5.

$$g_i = \gamma - y_i$$

$\gamma$  es la línea de pobreza,  $y_i$  es el ingreso de la persona  $i$ .  $g$  es mayor que cero si la persona es pobre.

La brecha total es

6.

$$Q = \sum_i g_i v_i(\gamma, Y)$$

Así que

7.

$$v_i = g_i/Q$$

El Axioma E dice que si la participación de la brecha de ingresos de la persona  $i$  ( $g_i$ ) en la brecha total ( $Q$ ) es mayor que la de la persona  $j$ , entonces el bienestar de  $i$  es inferior al de  $j$ .

El Axioma de Transferencia (T) es

Axioma T

“Dadas otras cosas, una transferencia de ingreso desde una persona que esté por debajo de la línea de pobreza a otra que sea más rica debe aumentar el indicador de la pobreza” (Sen 1976, p. 374).

El índice debe ser sensible a la transferencia de ingresos de un pobre a otra persona menos pobre.



El Axioma de Equidad Débil (ED) es

Axioma ED

“Para cada nivel de ingreso individual, sea una persona  $i$  con un bienestar más bajo que el de la persona  $j$ . Si se distribuye el ingreso total entre  $n$  individuos, incluyendo a “ $i$ ” y a “ $j$ ”, la solución óptima le debe proporcionar a  $i$  un mayor nivel de ingreso que a  $j$ ” (Sen 1973, p. 18).

El Axioma ED explicita los aspectos distributivos.

El índice de pobreza de Sen ( $P_s$ ) es

8.

$$P_s = H [I + (1 - I) * G_q]$$

que está compuesto por: ① una medida de la incidencia de la pobreza ( $H$ ), ② una medida de la brecha del ingreso entre los pobres, o medida de intensidad ( $I$ ), y ③ una medida de la distribución del ingreso entre los pobres, o Gini del grupo de los pobres ( $G_q$ ).  $q$  es el número de pobres. La medida de desigualdad es constitutiva del índice de pobreza.

9.

$$H(Y, \gamma) = q/n$$

$H$  es función del ingreso ( $Y$ ) y de la línea de pobreza ( $\gamma$ ).  $q$  representa a todos los pobres de la población  $n$  ( $q < n$ ).  $q$  es el número de personas que están por debajo de la línea de pobreza  $\gamma$ .

10.

$$I = \sum_i \frac{g_i}{q \gamma}$$

### 3. MEDIDAS DE DESIGUALDAD

En esta sección revisamos algunas medidas de desigualdad. La descripción de cada medida está acompañada de una aplicación al caso colombiano.

Las medidas de desigualdad suelen girar alrededor del ingreso. Esta aproximación tiene la desventaja de que al lado de la desigualdad económica existen otras inequidades que no son captadas por el ingreso: de oportunidades, de acceso, de mercado, de expresión, etc. (Sen 1992). Pese a esta limitación, el ingreso tiene ventajas importantes: guarda una relación monótona con el bienestar (Axioma M), es cardinal y facilita las comparaciones interpersonales (CI).

Las medidas no son neutras, puesto que expresan aquella parte de la realidad en la que está interesado el investigador. Las medidas positivas se diferencian de las normativas en que las primeras no explicitan la preferencia por un tipo de igualdad específico, mientras que las segundas sí lo hacen. En las páginas siguientes nos referiremos a las medidas positivas.

Los ejercicios empíricos los hicimos con la Encuesta de Hogares (1982-1997), que en Colombia sigue siendo la principal fuente de información de los estudios sobre distribución del ingreso. Las Encuestas de Hogares fueron concebidas para captar la dinámica del mercado laboral y no para medir la concentración del ingreso. Y, entonces, no es de extrañar que siendo un instrumento excelente para saber lo que pasa en el mercado laboral, no proporcione la información necesaria para conocer la estructura y la evolución de la distribución del ingreso.

Las Encuestas de Hogares no permiten decir nada sobre la distribución de la riqueza y de los activos. La variable central de la Encuesta es el ingreso laboral. Los acercamientos a otras formas de ingreso son muy limitadas y fragmentarias.

Al calcular las medidas de desigualdad utilizando los datos originales de las Encuestas de Hogares observamos la presencia de cuatro efectos: el efecto inflación (EI), el efecto censuramiento (EC), el efecto subdeclaración (ES) y el efecto omisión (EO).

Efecto inflación (EI). La inflación en Colombia ronda alrededor del 18%-20%. Tenemos el “honor” de ser el país donde este tipo de inflación - moderada - se ha mantenido por más tiempo. El efecto inflación se refiere a la distorsión que causa la inflación en el reporte de ingresos y en las medidas de desigualdad. Para nuestros propósitos el “efecto inflación” no considera la incidencia que tiene la inflación en la distribución del ingreso. Este tema, que es fundamental, desborda los objetivos de este ensayo.

Efecto censuramiento (EC). El censuramiento resultó de un problema técnico (Sarmiento E. 1995; Sánchez y Rivas 1995; Reyes, Farné, Perdomo, Rodríguez 1996). En las Encuestas de Hogares comprendidas entre septiembre de 1973 (EH-1) y junio de 1993 (EH-80), se censuró la información de los ingresos superiores. La celda superior tenía capacidad para 6 dígitos, así que

en el último rango, por falta de espacio en la celda, terminaban agrupándose todas las personas que ganaban, en valores nominales, \$ 999.998 o más. Y en la parte correspondiente a ingresos en especie la casilla última tenía capacidad para 5 dígitos, de tal manera que allí se agrupaban quienes recibían, en valores nominales, \$ 99.998 o más.

El censuramiento reduce la brecha de la distribución y ésta aparece más igualitaria de lo que realmente es, porque la persona que ganaba un millón de pesos quedaba en el mismo grupo que don Julio Mario Santodomingo. Para corregir el censuramiento frecuentemente se utiliza la llamada ley de Pareto <sup>7/</sup>. Sea,

11.

$$N(y) = \beta y^{-\alpha}$$

$N$  es el número de individuos que reciben ingresos más allá del nivel  $y$ .  $\alpha$  es negativo porque el número de personas va disminuyendo a medida que el ingreso de referencia aumenta. El logaritmo de la expresión anterior es

12.

$$\ln N(y) = \ln \beta - \alpha \ln y$$

$\alpha$  mide la relación que existe entre el ingreso de referencia y el número de perceptores. Es la elasticidad del número de perceptores con respecto a  $y$ . Una vez realizado el ejercicio la brecha de la distribución se amplía y el Gini aumenta. Este tipo de corrección tiene las bondades y los defectos de los supuestos del modelo subyacente. Y, finalmente, termina siendo una solución transitoria que no toca el problema de fondo del censuramiento.

La subdeclaración (ES) de ingresos (Reyes, Farné, Perdomo y Rodríguez 1996) se presenta especialmente en los niveles altos.

La omisión (EO) consiste en no declarar ingresos. En nuestros cálculos no hicimos imputaciones por omisión, así que los hogares que no declararon ingresos los dejamos por fuera.

Los efectos pueden complementarse. La inflación, por ejemplo, agrava las distorsiones ocasionadas por el censuramiento y la subdeclaración. Los resultados de cada una de las medidas debe analizarse teniendo en cuenta el impacto de estos efectos. Al eliminar las omisiones, para nosotros únicamente son pertinentes los primeros tres efectos.

### 3.1. MÁXIMO Y MÍNIMO (MM)

---

<sup>7/</sup> Farné y Perdomo (1997, pp. 3-4) explican el significado de la ley de Pareto. Ver, también, Reyes, Farné, Perdomo y Rodríguez (1996).

Es el número de veces que el ingreso máximo supera al ingreso mínimo.

13.

$$MM = \frac{\text{Max}_i y_i}{\text{Min}_i y_i}$$

Esta relación se utiliza con mucha frecuencia en las comparaciones internacionales, porque es sencilla de calcular y tiene un fuerte poder explicativo.

Con el fin de evitar la arbitrariedad de los valores extremos, modificamos 13 y calculamos,

14.

$$MM = \frac{\mu_{10}}{\mu_1}$$

Los valores máximo y mínimo corresponden, respectivamente, al promedio de los deciles 10 ( $\mu_{10}$ ) y 1 ( $\mu_1$ ).

## Cuadro 1

Máximos, mínimos, rango, media, varianza, desviación estándar del  
logaritmo, Gini, Theil  
Ingresos mensuales hogar

	$\mu$	Mínimo	Máximo	MM	E	V	H	G	T
82	28874	4097	114680	27.99	3.83	2	0.936	0.4957	0.514
83	38068	5267	152453	28.94	3.87	5	0.938	0.4971	0.555
84	44707	6863	168965	24.62	3.63	3	0.920	0.4798	0.451
85	48502	6704	185961	27.74	3.70	4	0.941	0.4862	0.471
86	61600	8651	242449	28.03	3.80	7	0.920	0.4891	0.496
87	74770	11695	284220	24.30	3.64	9	0.906	0.4755	0.452
88	96346	15157	374601	24.71	3.73	14	0.914	0.4820	0.456
89	131573	21095	497342	23.58	3.62	23	0.905	0.4809	0.439
90	161618	27186	624233	22.96	3.69	38	0.898	0.4807	0.452
91	198139	28255	741512	26.24	3.60	52	0.926	0.4773	0.434
92	252283	39607	962213	24.29	3.66	87	0.929	0.4852	0.448
93	389285	54133	1787977	33.03	4.45	890	0.951	0.5367	0.761
94	510116	73827	2266358	30.70	4.30	1170	0.952	0.5303	0.680
95	594971	81895	2734696	33.39	4.46	1401	0.957	0.5335	0.693
96	671947	93725	2830555	30.20	4.07	2055	0.949	0.5124	0.584
97	796259	108402	3301917	30.46	4.01	1569	0.961	0.5128	0.557

$\mu$  es la media de la distribución total.

Mínimo es el valor promedio del decil 1 ( $\mu_1$ ).

Máximo es el valor promedio del decil 10 ( $\mu_{10}$ ).

MM resulta de aplicar la fórmula 14 (p. 15).

E resulta de aplicar la identidad 17 (p. 20).

V es la varianza, fórmula 21 (p. 27).

H es la desviación estándar del logaritmo, fórmula 25 (p. 30).

G es el coeficiente de Gini, fórmulas 27 - 29 (p. 32).

T es el coeficiente de Theil, fórmula 35 (p. 35).

Todos los valores menos la varianza están en millones de pesos corrientes. La varianza en miles de millones de pesos corrientes.

Fuente: Cálculos de los autores a partir de las Encuestas de Hogares (DANE) - septiembres - 7 áreas metropolitanas.

Según el cuadro 1, en 1982 el valor de MM fue 27.99. Esto significa que el ingreso promedio del decil superior era casi 28 veces mayor al del decil inferior. En 1997 esta relación había aumentado a 30.46 veces. En el contexto internacional Colombia tiene una distribución del ingreso muy desigual <sup>8/</sup>.

Las curvas de la figura 1 corresponden a la columna MM del cuadro 1. La gráfica muestra que el efecto censuramiento (EC) es considerable: entre 1992 y 1993 MM pasó de 24.29 a 33.03. Es decir, cuando el DANE amplió el número de dígitos de la celda de ingresos, la relación MM subió 8.74 puntos. Este cambio representa una variación del 36%. El efecto censuramiento tiene, por lo menos, dos problemas:

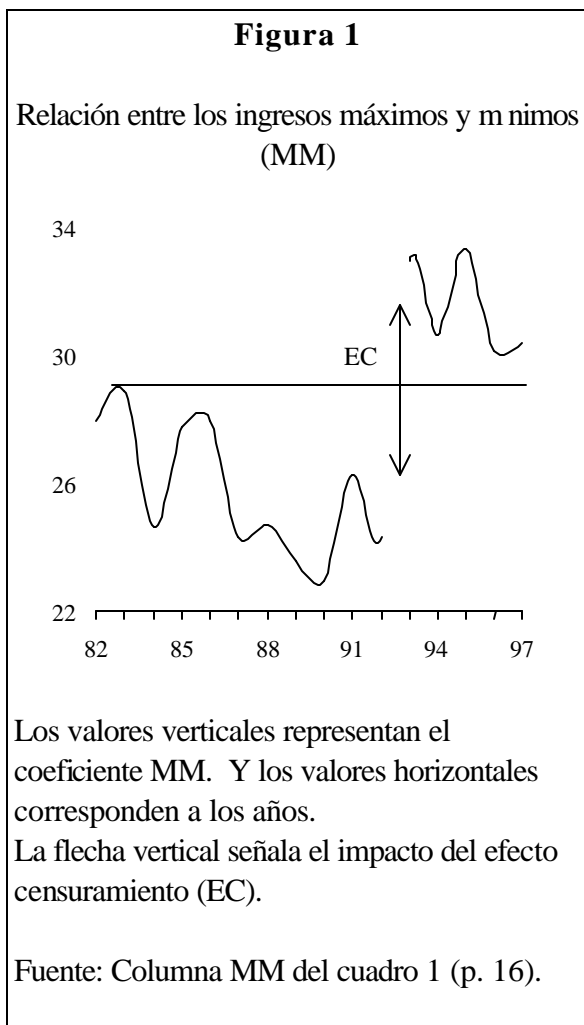
Primero, rompe la serie de manera significativa. No hay continuidad. Los dos períodos, antes y después del censuramiento, no son estrictamente comparables.

El censuramiento presenta un segundo problema: el efecto inflación (EI) lo va agravando a medida que pasa el tiempo. El censuramiento y la inflación reducen la brecha entre los ingresos altos, que se comprimen, y los ingresos bajos que suben en términos nominales. Con razón Sarmiento E. (1995) señala que el censuramiento ha ocultado las verdaderas dimensiones de la desigualdad.

Las curvas de la figura 1 no pueden leerse de la misma manera, ya que la primera (antes del 93) involucra los efectos subdeclaración, censuramiento e inflación (ES+EC+EI) y la segunda el efecto combinado subdeclaración (ES) e inflación (ES+EI). La subdeclaración que es común en los hogares de ingresos superiores, se intensifica con la inflación.

---

<sup>8/</sup> Con la información estadística del Informe del Banco Mundial (1994), que cubre 150 países, calculamos MM. La información disponible nos obligó a utilizar quintiles en lugar de deciles. La relación entre los quintiles 5 y 1 varía mucho: el rango va desde 3.5 en Bulgaria hasta 32.1 en Brasil. En Japón la relación es de 4.3, en Alemania el ingreso en Colombia no es tan desigual como en Brasil, pero sí es muy inequitativa con respecto a Japón o Alemania.



La interpretación del indicador MM debe tener en cuenta el impacto de los tres efectos señalados. La conjunción de (ES+EC+EI) se manifiesta en una reducción del índice MM. El efecto combinado de (ES+EI) también disminuye la desigualdad.

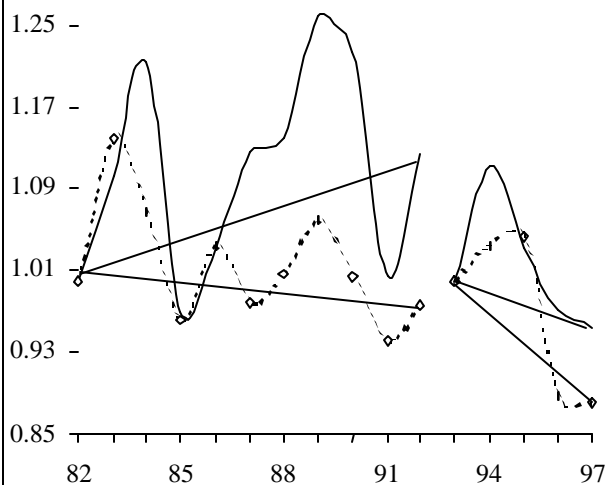
La figura 2 y el cuadro 2 (p. 20) ayudan a entender mejor la forma como interactúan los tres efectos. Al comienzo de cada uno de los dos subperíodos el ingreso en pesos reales es igual a 1. Con el paso del tiempo, el diferencial se va ampliando: mientras que el ingreso real, en pesos constantes, del decil 10 disminuye, el del decil 1 aumenta. Una interpretación rápida de la figura 2 llevaría a pensar que las tendencias decrecientes de MM (figura 1) se explican porque el ingreso promedio del decil 1 ha aumentado, mientras que el del decil 10 ha disminuido. Nuestra hipótesis es que la caída del ingreso promedio del decil 10 se explica porque además del censuramiento, la inflación ha estimulado la subdeclaración de ingresos de los niveles altos.

Cada una de las curvas de la figura 1 transmite la falsa sensación de que la concentración del ingreso ha disminuido a lo largo del tiempo. Sin embargo, al resolver el problema del censuramiento en el 93, el coeficiente MM aumentó 8.74 puntos. Y todavía quedan sin valorar las distorsiones causadas por ES y EI.

**Figura 2**

Evolución de los valores máximos y mínimos.

Pesos de 1997  
1982=1 y 1993=1



La línea punteada representa los valores máximos (promedio del decil 10). La línea continua corresponde a los valores mínimos (promedio del decil 1).

Fuente: Cuadro 2 (p. 20).

En síntesis, dados los inconvenientes que tiene la Encuesta de Hogares, el indicador MM no ofrece elementos de juicio suficientes para determinar si entre 1982 y 1997 la desigualdad del ingreso ha aumentado o disminuido. De todas maneras, al comparar los años extremos, el 82 y el 97, se observa un aumento de MM que pasa de 27.99 a 30.46 (cuadro 1, p. 16).

Valores máximos y mínimos  
Ingreso mensual hogar  
Pesos de 1997

	Mín	Máx	Mín	Ma	Mín	Ma
			x	x	x	x
8	90678	253818	1.0	1.0		
2		4	0	0		
8	99943	289284	1.1	1.1		
3		6	0	4		
8	110104	271060	1.2	1.0		
4		0	1	7		
8	87830	243629	0.9	0.9		
5		5	7	6		
8	93708	262624	1.0	1.0		
6		3	3	3		
8	102147	248241	1.1	0.9		
7		1	3	8		
8	103327	255361	1.1	1.0		
8		4	4	1		
8	114018	268817	1.2	1.0		
9		5	6	6		
9	111010	254901	1.2	1.0		
0		4	2	0		
9	90973	238749	1.0	0.9		
1		4	0	4		
9	101908	247576	1.1	0.9		
2		8	2	8		
9	113599	375213			1.0	1.0
3		5			0	0
9	126373	387944			1.1	1.0
4		5			1	3
9	117210	391398			1.0	1.0
5		5			3	4
9	110314	333156			0.9	0.8
6		4			7	9
9	108402	330191			0.9	0.8
7		7			5	8

3.2. EL RANGO (E)

Sea “y” el ingreso y “n” el número de personas. El nivel medio de ingreso  $\mu$  es igual a,

15.

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \quad i = 1, \Delta n$$

i es el número de personas.

Al multiplicar y dividir por  $y_i$ ,

16.

$$\mu = \frac{y_i \sum_{i=1}^n y_i}{y_i n}$$

El valor de  $\mu$  se presenta en el cuadro 1 (p. 16).

$$y_i = n \mu \frac{y_i}{\sum_{i=1}^n y_i}$$

$$y_i = n \mu x_i$$

$x_i$  representa la participación que tiene el ingreso de cada persona en el ingreso total.

El rango (E) es igual a

17.

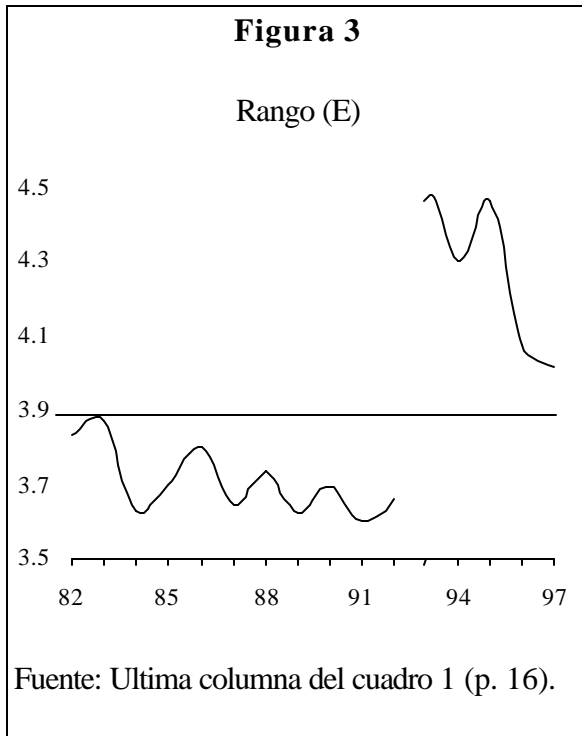
$$E = \frac{(\text{Max}_i y_i - \text{Min}_i y_i)}{\mu}$$

El rango compara los valores extremos de una distribución y los divide por la media. E se reduce

Máximo corresponde al valor promedio del decil 10 ( $\mu_{10}$ ). Mínimo es el valor promedio del decil 1 ( $\mu_1$ ). Ambos en pesos constantes del 97..

Las últimas cuatro columnas representan la tasa de crecimiento: con respecto a 1982, para el período 82-92 y con respecto a 1993 para el período

cuando la distribución se hace más igualitaria, hasta el punto de que cuando los extremos son idénticos,  $E = 0$ .



Para estimar E utilizamos el mismo criterio que en 14 (p. 15). Los valores máximo y mínimo corresponden a la media de los deciles 10 y 1.

18.

$$E = \frac{(\mu_{10} - \mu_1)}{\mu}$$

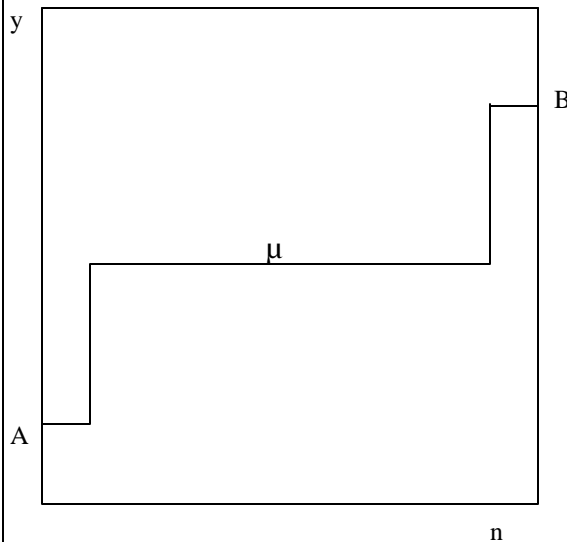
El rango (cuadro 1, p. 16, figura 3, p. 21) sigue la misma tendencia que MM (figura 1, p. 18), aunque la curva de E es más suave que la de MM. Los comentarios que hicimos sobre los efectos inflación, censuramiento y subdeclaración también se aplican a E.

Tanto el rango como MM ignoran lo que sucede con la distribución entre los extremos (Sen 1973, p. 25). Esta situación se percibe claramente al comparar las figuras 4 y 5 <sup>9/</sup>.

<sup>9/</sup> Las figuras 4, 5 y 7 han sido inspiradas de Sen (1973).

**Figura 4**

Distribución del ingreso caracterizada por el hecho de que una gran parte de la población gana el ingreso medio.



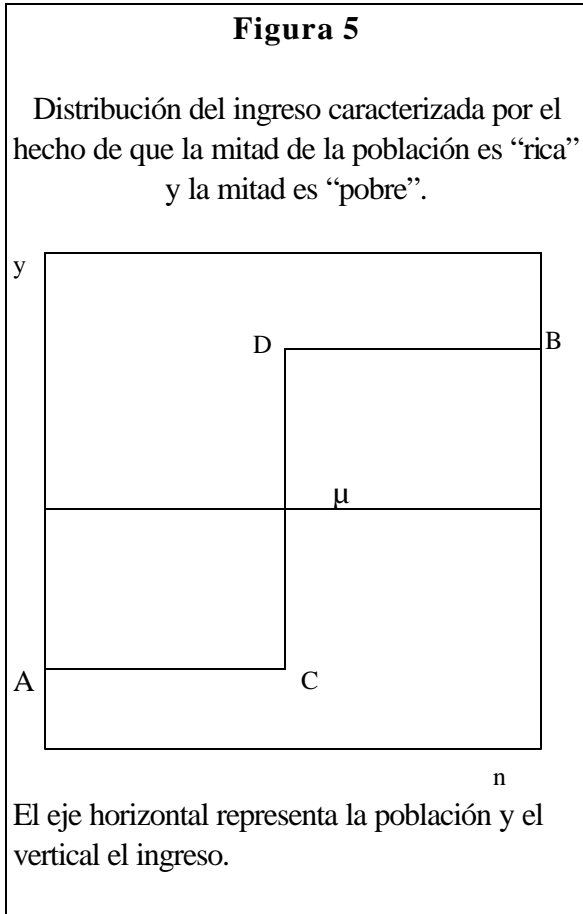
El eje horizontal representa la población y el vertical el ingreso.

Si  $E_1$  es el rango correspondiente a la figura 4 y  $E_2$  el rango de la figura 5, entonces,

19.

$$E_1 = E_2 = \frac{y_B - y_A}{\mu}$$

En ambos casos, el ingreso máximo es  $y_B$  y el ingreso mínimo es  $y_A$ . Como la media ( $\mu$ ) es idéntica, entonces,  $E_1 = E_2$ . Esta igualdad oculta las claras diferencias que existen entre las dos distribuciones. La distribución del ingreso de la figura 4 indica que la mayoría de la población gana el ingreso medio. Sólo un porcentaje muy pequeño se coloca en los extremos. En cambio, la distribución del ingreso de la figura 5 muestra que nadie gana exactamente el ingreso medio y que la mitad de la población es “rica” y la mitad “pobre”.



Estos resultados indican que el rango no es una medida de desigualdad apropiada. En virtud de la identidad  $E_1 = E_2$ , no es posible saber cuál de las dos distribuciones es más desigual. El rango deja el campo abierto a una especie de limbo ético. Quienes son partidarios de que la mayoría de la población reciba el ingreso medio (figura 4), no tienen modo de demostrar que su posición es más equitativa que la de quienes piensan que es conveniente que la sociedad esté dividida entre “ricos” y “pobres” 10/.

### 3.3. LA DESVIACIÓN DE LA MEDIA RELATIVA (M)

La desviación de la media relativa no tiene los problemas del rango, ya que incluye todos los puntos de la distribución.

20.

$$M = \frac{\sum_{i=1}^n |\mu - y_i|}{n \mu}$$

$$M = \left[ \frac{\sum_{i=1}^n |\mu - y_i|}{n} \right] \frac{1}{\mu}$$

10/ Recuérdese que uno de los argumentos que ha servido para justificar la existencia de la nobleza es que sin ella los pobres estarían en peor situación. Por ello, “nobleza obliga”. “El ideal aristocrático se aplica a un sistema abierto, al menos desde el punto de vista jurídico favorecidos en él es considerada como justa sólo en el caso en que aquellos que están abajo tuvieran menos cuando se les diese menos a los de arriba. De esta manera se transfiere la idea de noblesse oblige a la concepción de la aristocracia natural. Esta formulación del ideal aristocrático se deriva de la exposición de la aristocracia que hace Santayana: “un régimen aristocrático sólo puede ser justificado otorgando beneficios y demostrando que cuanto menos se les dé a los de arriba, menos alcanzarán los de abajo” (Santayana 1905, p. 109, citado por Rawls 1971) ... la aristocracia natural es una posible interpretación de los dos principios de la justicia; un sistema feudal ideal puede también tratar de cumplir con el principio de la diferencia” (Rawls 1971, p. 96).

Si,

$$\Psi = \frac{\sum_{i=1}^n |\mu - y_i|}{n}$$

$$M = \Psi \frac{1}{\mu}$$

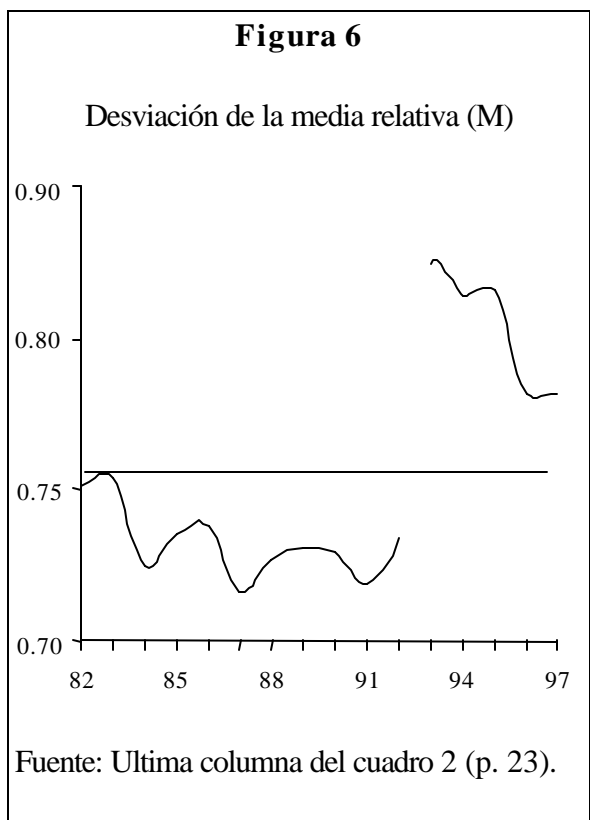
<b>Cuadro 3</b>		
Desviación de la media relativa (M).		
	$\psi$	M
82	21675	0.751
83	28700	0.754
84	32414	0.725
85	35665	0.735
86	45499	0.739
87	53561	0.716
88	70077	0.727
89	96230	0.731
90	11781	0.729
	8	
91	14246	0.719
	1	
92	18515	0.734
	8	
93	32098	0.825
	8	
94	41502	0.814
	7	
95	48522	0.816
	2	
96	52555	0.782
	5	
97	62245	0.782
	4	

Los valores de  $\psi$  resultan de estimar 20 (p. 23).  
M es la desviación de la media relativa, fórmula 20 (p. 23).

Fuente: La misma del cuadro 1 (p. 16).

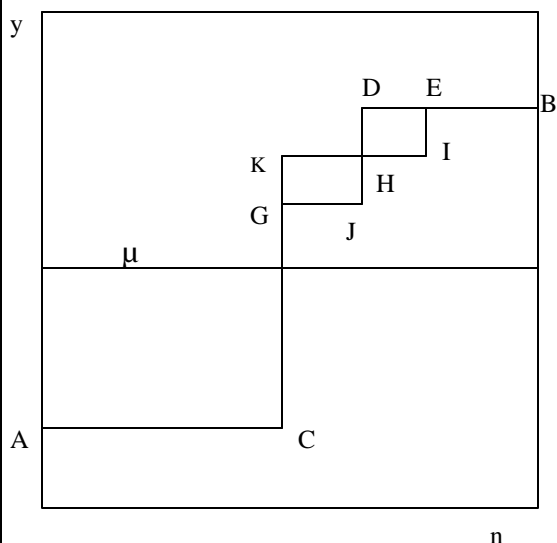
M (figura 6 y cuadro 2) sigue la misma tendencia que MM (figura 1, p. 18) y E (figura 3, p. 21), pero con fluctuaciones más tenues. Esta suavización no modifica los problemas básicos de los efectos ES, EI y EC.

Si la distribución del ingreso es igualitaria, entonces,  $M = 0$ . La desviación de la media relativa tiene la desventaja de que no se modifica cuando la distribución del ingreso se realiza en los espacios superior o inferior de la media  $\mu$ .



**Figura 7**

La desviación de la media relativa es insensible a los cambios de la distribución que tienen lugar en los espacios superior o inferior de la media  $\mu$ .



El eje horizontal representa la población y el vertical el ingreso. El coeficiente M de la distribución BEIKGCA es igual al de la distribución BEDJGCA.

Supóngase que se presenta una transferencia de ingresos al interior de los “ricos”: desde los más ricos hacia los menos ricos. El coeficiente M permanece inalterado cuando se pasa de la distribución BEDJGCA a BEIKGCA (figura 7). Mientras que los más ricos dejan de percibir EDHI, los menos ricos aumentan su ingreso en HKGJ. El valor de M no se modifica porque EDHI y HKGJ se compensan.

### 3.4. LA VARIANZA (V)

La fórmula de la varianza es,

21.

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n (\mu - y_i)^2}{n}$$

Al elevar al cuadrado la distancia con respecto a la media, la varianza es muy sensible a los cambios que se presentan en los espacios superior o inferior de la media  $\mu$  de la figura 7.

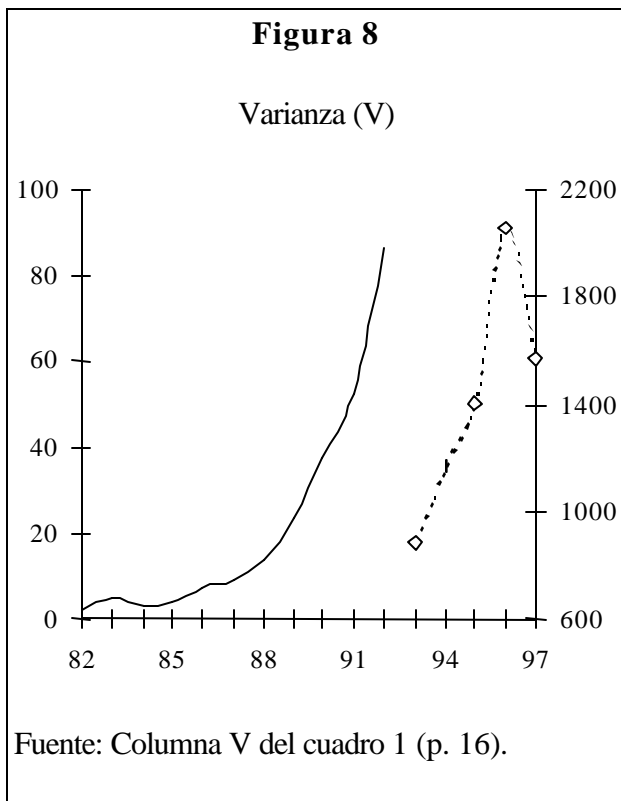
Con la varianza sí es posible percibir de qué manera se afecta la desigualdad al pasar de BEDGCA y BEFGCA.

La varianza tiene la cualidad de que cumple fielmente la condición Pigou (1912) -Dalton (1920, 1925). Para estos autores una medida de desigualdad es correcta si el coeficiente disminuye [aumenta] al transferir dinero de un rico [pobre] a un pobre [rico] <sup>11/</sup>.

Al calcular la varianza se observa que ésta es creciente (cuadro 1, p. 16 y figura 8). Como la estimación se realiza a pesos corrientes la tendencia ascendente está muy influenciada por el efecto inflación (EI), que en este caso distorsiona la distribución presentándola más desigual. El efecto EI acentúa la desigualdad, mientras que EC y ES la reducen. El efecto predominante es EI.

<sup>11/</sup> Una explicación de la condición Pigou-Dalton se encuentra en Sen (1973, pp. 27 y ss; 1983, p. 166).

Así como de los indicadores anteriores (MM, E, M) no se puede sacar la conclusión de que la distribución del ingreso ha mejorado, a partir de la varianza tampoco es legítimo afirmar que la desigualdad ha empeorado.



### 3.5. EL COEFICIENTE DE VARIACIÓN (C)

El valor de la varianza está muy determinado por la magnitud del ingreso promedio  $\mu$ . La varianza de una distribución que cambie mucho pero que tenga una media pequeña, será inferior a la de una distribución con variaciones leves pero con una media grande. El coeficiente de variación es igual a

22.

$$C = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\mu - y_i)^2}{n}}}{\mu}$$

23.

$$C = \frac{\sqrt{V}}{\mu}$$

la raíz cuadrada de la varianza sobre el ingreso medio. Es decir, la desviación estándar normalizada por el ingreso medio.

El coeficiente de variación tiene una limitación grande: no distingue la transferencia que hace una persona con ingresos de 1.100 pesos a un individuo que gana 1.000, de la que hace una persona que gana 1.000 a otra que gana 900. Supóngase que la media sea igual a 1.000. Entonces,

24.

C =

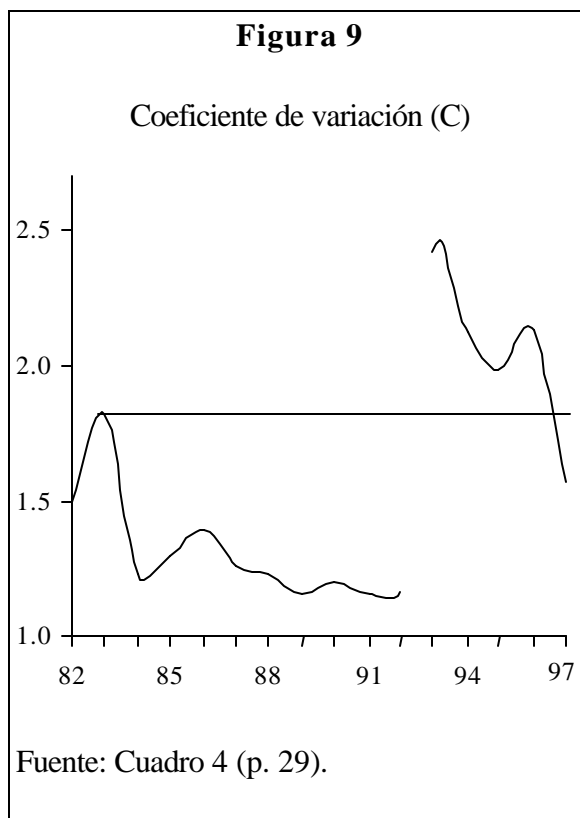
$$\frac{\sqrt{\frac{(1000 - 1100)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (\mu - y_i)^2}{n}}}{\mu} = \frac{\sqrt{\frac{(1000 - 900)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (\mu - y_i)^2}{n}}}{\mu}$$

<b>Cuadro 4</b>		
Coeficiente de variación (C). Millones de pesos.		
	Des. Est.	C
82	43239	1.5
83	69433	1.8
84	55111	1.2
85	63258	1.3
86	86051	1.4
87	94218	1.3
88	118195	1.2
89	152118	1.2
90	194705	1.2
91	228889	1.2
92	294551	1.2
93	943239	2.4
94	108166	2.1
	5	
95	118363	2.0
	8	
96	143352	2.1
	7	
97	125259	1.6
	7	

Des. Est. es la desviación estándar.  
C es el coeficiente de variación.

Fuente: La misma del cuadro 1 (p. 16).

La tendencia que presenta el coeficiente de variación a lo largo del tiempo



(cuadro 4 y figura 8) recupera la forma general que se había perdido con la varianza. Al dividir la varianza ( $V$ ) por la media ( $\mu$ ), el efecto inflación (EI) deja de ser predominante. Y ahora se siente nuevamente el impacto del censuramiento (EC) y la subdeclaración (ES).

Tal y como se observa en la figura 8, el indicador C atenúa considerablemente el ciclo entre el 87 y el 92.

## 3.6. LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DEL LOGARITMO (H)

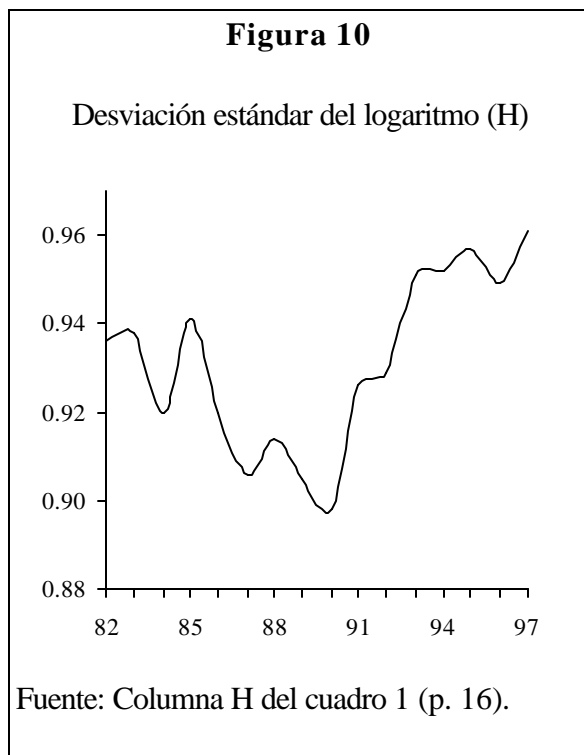
Para evitar la arbitrariedad de los valores absolutos, muy frecuentemente se recurre a la desviación estándar de los logaritmos. Sea  $y_{lg}$  el logaritmo de  $y$

25.

$$H = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\mu_{y_{lg}} - y_{lg})^2}{n}}$$

$\mu_{y_{lg}}$  significa la media del logaritmo de los  $y_i$ . Esta fórmula sigue teniendo las limitaciones de V y de C. Adicionalmente, la desviación estándar del logaritmo a veces no cumple con el principio Pigou-Dalton. Es factible que en situaciones donde el nivel de ingresos es alto, la transferencia de un rico a un pobre se traduzca en un aumento de H y no en una disminución, como lo exigiría la condición Pigou-Dalton (Sen 1973, p. 32; Dasgupta, Sen y Starrett 1973).

Los valores de H (cuadro 1, p. 16, figura 10) son muy diferentes a los encontrados hasta ahora. La desigualdad disminuye entre el 82 y el 90 y aumenta a partir de este año hasta el 97. Exceptuando la varianza, las medidas analizadas antes muestran que la distribución del ingreso mejoró en los noventa. H indica lo contrario.



La brecha entre el 92 y el 93 es relativamente pequeña, lo que indicaría que H reduce el impacto del censuramiento.

## 3.7. EL COEFICIENTE DE VARIACIÓN DEL LOGARITMO (CL)

Siguiendo la misma lógica que se utilizó para calcular el coeficiente de variación, podría hablarse de un coeficiente de variación del logaritmo.

26.

$$CL = \frac{H}{\mu_{y_{lg}}}$$

CL es una medida de distribución superior a H

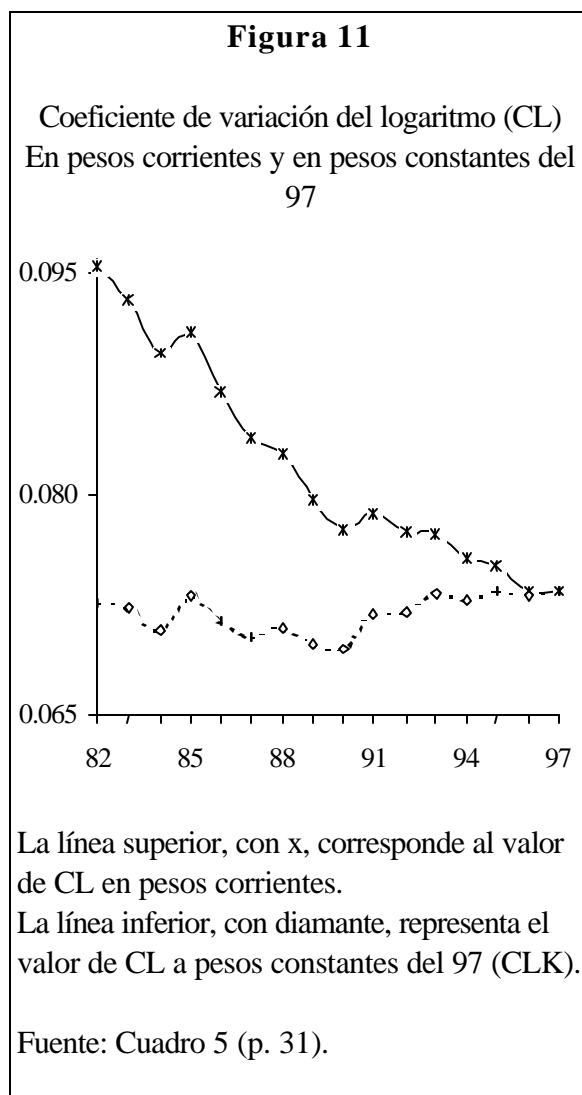
porque está normalizada por el ingreso medio. Sin embargo, no es sensible al tipo de transferencias que explicábamos a propósito del coeficiente de variación (C).

<b>Cuadro 5</b>				
Coeficiente de variación del logaritmo (CL). Pesos corrientes y pesos constantes del 97.				
	$\mu_{ylg}$	CL	$\mu_{ylg}$ K	CLK
82	9.805	0.095	12.873	0.073
83	10.072	0.093	12.979	0.072
84	10.275	0.090	13.002	0.071
85	10.339	0.091	12.861	0.073
86	10.577	0.087	12.896	0.071
87	10.797	0.084	12.900	0.070
88	11.041	0.083	12.897	0.071
89	11.361	0.080	12.974	0.070
90	11.566	0.078	12.906	0.070
91	11.767	0.079	12.890	0.072
92	11.998	0.077	12.888	0.072
93	12.308	0.077	12.992	0.073
94	12.601	0.076	13.065	0.073
95	12.744	0.075	13.045	0.073
96	12.919	0.073	12.985	0.073
97	13.087	0.073	13.087	0.073
$\mu_{ylg}$ es la media del logaritmo de los $y_i$ . CL es el coeficiente de variación del logaritmo, fórmula 26 (p. 30). La K significa pesos constantes del 97.  Fuente: La misma del cuadro 1 (p. 16).				

Calculamos el CL a precios corrientes y constantes (cuadro 5 y figura 11). A pesos corrientes (CL) la desigualdad se reduce. En pesos constantes (CLK) es ligeramente decreciente hasta finales de los ochenta. Y, en los noventa sube hasta volver a alcanzar el nivel que tenía en el 82. El aumento de la desigualdad en los noventa también se observaba al aplicar H (figura 10, p. 30).

La brecha que genera el censuramiento en la mayoría de las medidas entre los años 92 y 93 desaparece con el CL.

Si CL reduce el efecto censuramiento y, en términos constantes, también disminuye el efecto de la inflación, podría decirse que CLK es una aproximación menos sesgada que CL.



### 3.8. EL COEFICIENTE DE GINI (G)

La fórmula del coeficiente de Gini es

27.

$$G = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |y_i - y_j|}{2 n^2 \mu}$$

28.

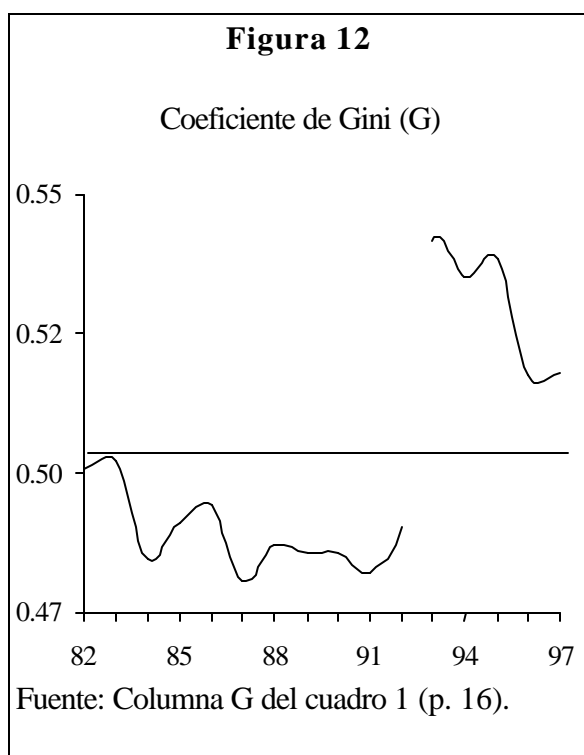
$$= 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Min}(y_i, y_j)}{n^2 \mu}$$

29.

$$= 1 + \frac{1}{n} - \frac{2(y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n)}{n^2 \mu} \quad \text{para } y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$$

Maddock (1986, p. 144 y ss.) muestra que estas tres presentaciones llevan a resultados idénticos, aunque cada una de pie para realizar análisis teóricos diferentes (Contraloría General de la República 1995, pp. 4-6 y ss; Sen 1973, pp. 30 y ss.).

El tamaño de la desigualdad corresponde al área comprendida entre la curva de Lorenz y la diagonal. Hay una relación directa entre el tamaño del área, el valor del Gini y la intensidad de la desigualdad.



El comportamiento del Gini (cuadro 1, p. 16, figura 12) es muy similar al de MM, E, M, C, Y, de la misma manera que estas medidas, el Gini resulta siendo muy sensible a las distorsiones generadas por EC, EI y ES.

### 3.9. LA MEDIDA DE ENTROPÍA DE THEIL (T)

Si la probabilidad de que suceda un evento es reducida, es muy importante saber que en algún momento efectivamente ocurrió (Theil 1967). Sea  $x$  es la probabilidad de que suceda un evento y  $h(x)$  la información acumulada de acontecimientos pasados,

30.

$$h(x) = \lg\left(\frac{1}{x}\right)$$

Si el número de eventos posible es  $n$ , con sus respectivas probabilidades,  $x_1, \dots, x_n$ . La suma de las respectivas probabilidades

31.

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad x_i \geq 0$$

32.

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{i=1}^n x_i h(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \lg\left(\frac{1}{x_i}\right) \end{aligned}$$

La entropía es mayor mientras más cercanas están las  $n$  probabilidades  $x_i$  a  $(1/n)$ . En termodinámica la entropía es considerada como una medida de desorden, al interpretar  $x_i$  como la participación del ingreso de la persona  $i$  en el ingreso total,  $H(x)$  es una medida de igualdad. Cuando la distribución es proporcional, igual para todos, entonces,  $x_i = (1/n)$  y  $H(x)$  alcanza el máximo valor de  $\lg n$ .

33.

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \lg\left(\frac{1}{1/n}\right) \\ &= (n/n) \lg n \\ &= \lg n \end{aligned}$$

El coeficiente de Theil es la diferencia entre este máximo valor de  $\lg n$  y la entropía  $H(x)$ .

34.

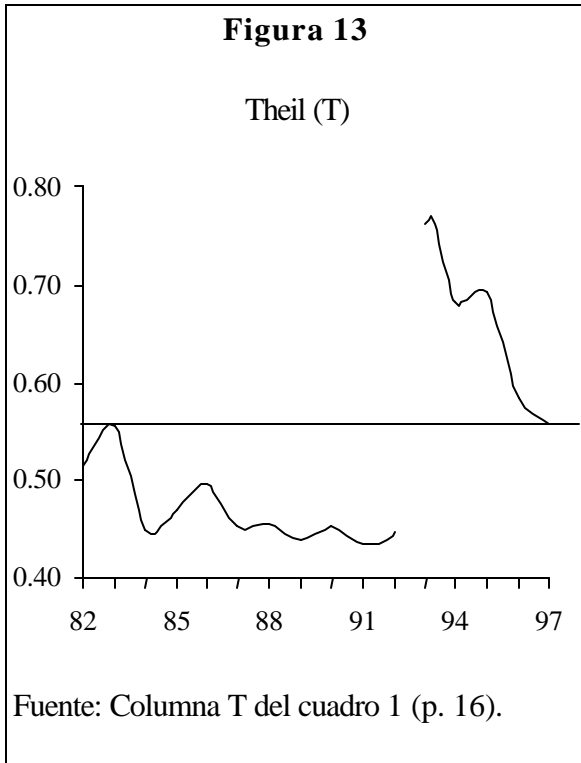
$$\begin{aligned} T &= \lg n - H(x) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \lg n x_i \end{aligned}$$

Hemos estimado el coeficiente de Theil a partir de la fórmula propuesta por Cowell (1977, p. 49).

35.

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\mu} \lg \left( \frac{y_i}{\mu} \right)$$

Los resultados (cuadro 1, p. 16, figura 13) mantienen la tendencia general observada en MM, E, M, C, G. Los comentarios que hicimos a propósito del coeficiente de Gini sobre las distorsiones generadas por EI, EC y ES también son válidas en el caso del coeficiente de Theil.



En síntesis, desde el punto de vista empírico, y dadas las limitaciones de la Encuesta de Hogares, el coeficiente más apropiado para evaluar la distribución del ingreso es el coeficiente de variación de logaritmo en pesos constantes (CLK). Esta conclusión no tiene un carácter general. La proponemos como alternativa viable para evaluar la evolución de la distribución del ingreso en Colombia cuando se utiliza la Encuesta de Hogares.

- \_\_\_\_\_, no. 20, mayo-agosto, pp. 141-152.
- PIGOU A. C., 1912., Wealth and Welfare, Macmillan, London.
- RAWLS John., 1971. Teoría de la Justicia, México, Fondo de Cultura Económica, 1985.
- RAWLS John., 1993. Liberalismo Político, Fondo de Cultura Económica, México, 1996.
- REAL ACADEMIA DE CIENCIAS DE SUECIA., 1998. Premio en Ciencias Económicas en Memoria de Alfred Nobel Otorgado a Amartya Sen por su Contribuciones a la Economía del Bienestar, [www.kva.se](http://www.kva.se).
- REYES Alvaro., FARNE Stefano., PERDOMO Jesús., RODRIGUEZ Luis., 1996. Distribución de los Ingresos Urbanos en Colombia en la Década del Noventa, mimeo, Universidad Externado de Colombia.
- SANCHEZ Fabio., RIVAS Guillermo., 1995. El Descensuramiento de las Encuestas de Hogares, una Propuesta Metodológica, ponencia presentada en el seminario sobre Indicadores Sociales y de Gestión, Bogotá, 24-26 octubre.

- SARMIENTO Alfredo., GONZALEZ Jorge., 1998. "Algunos Aspectos Conceptuales del Índice de Condiciones de Vida", Coyuntura Social, no. 19, nov., pp. 67-88.
- SARMIENTO Eduardo., 1995. "Se Hizo el Milagro de la Distribución del Ingreso?", Coyuntura Social, no. 12, mayo, Fedesarrollo.
- SEN Amartya., 1970. Collective Choice and Social Welfare, Elsevier, Amsterdam.
- SEN Amartya., 1973. On Economic Inequality, Oxford University Press.
- SEN Amartya., 1976. "Poverty: An Ordinal Approach to Measurement", Econometrica, vol. 44, no. 2, pp. 219- 231. Reproducido en Choice, Welfare and Measurement, 1982, Harvard University Press, 1997, pp. 373-387.
- SEN Amartya., 1983. "Poor, Relatively Speaking", Oxford Economic Papers, vol. 35, no. 2, july, pp. 153-169.
- SEN Amartya., 1992. Inequality Reexamined, New York: Rusell Sage Foundation; Cambridge: Harvard University Press.
- THEIL H., 1967. Economics and Information Theory, North-Holland, Amsterdam.